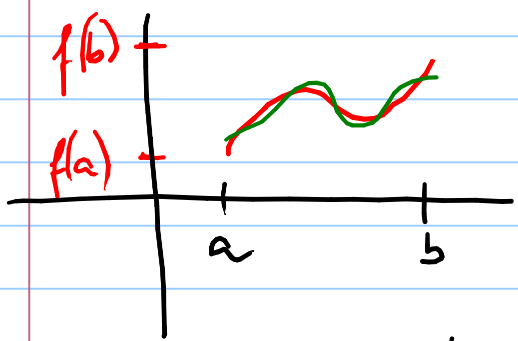
6. STUPEŇ ZOBRAZENÍ

Motivace

$$f \in C^1(\langle a,b \rangle), \quad p \in \mathbb{R}$$

Budeme chtít definovat stupeň f vzhledem k (a,b) a bodu p tak, aby korespondoval s počtem řešení rovnice
$$f(x) = p \quad \text{v intervalu } (a,b).$$

Budeme chtít, aby stupeň byl spojitý při malých změnách p a f. Proto předpokládejme
$$p \notin \{f(a), f(b)\}.$$



Navíc předpokládejme, že platí
$$\forall x \in (a,b): \left[f(x) = p \Rightarrow f'(x) \neq 0 \right] \quad (*)$$

Takovému bodu p přiřadíme číslo
$$\deg(f,(a,b),p) = \sum_{x \in M} \operatorname{sgn} f'(x),$$

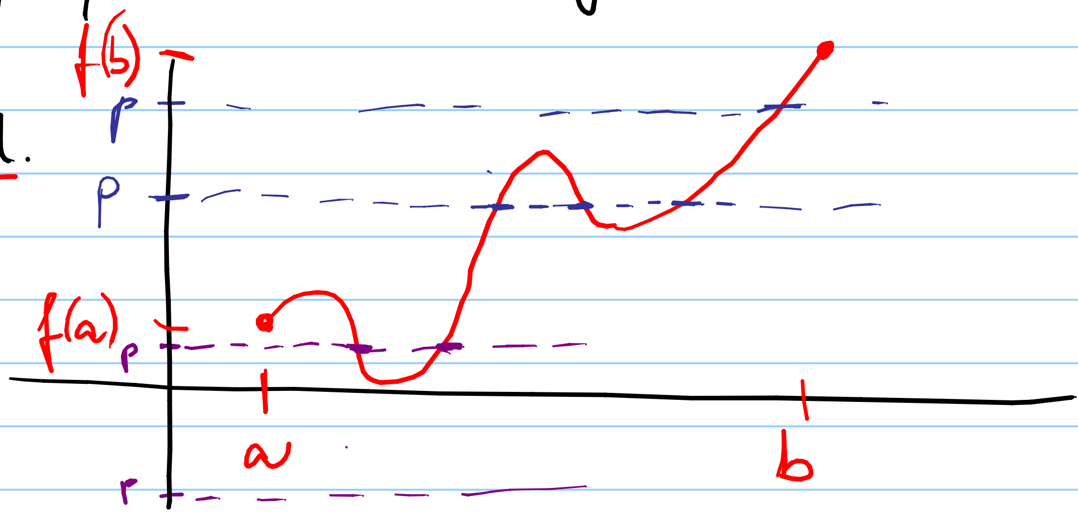
kde $M = \{x \in (a,b) : f(x) = p\}$. Je-li $M = \emptyset$, definujeme
$$\deg(f,(a,b),p) = 0.$$

Rozmysleme si, že z předpokladu

$f \in C^1(\langle a,b\rangle)$, $p \notin \{f(a), f(b)\}$, $\forall x \in (a,b): [f(x)=p \Rightarrow f'(x) \neq 0]$

vyplývá, že množina M je konečná.

Příklad.



Uvažujme znázorněnou funkci f a $p \in \mathbb{R}^n$, takovou, že platí (*). Pak

(i) $\forall p \in (f(a), f(b)): \deg(f,(a,b),p) = 1$

(a rovnice $f(x)=p$ má v (a,b) alespoň 1 řešení)

(ii) $\forall p \notin \langle f(a), f(b)\rangle: \deg(f,(a,b),p) = 0$

(a rovnice $f(x)=p$ nemusí mít v (a,b) řešení)

$$\boxed{\deg(f,(a,b),p) \neq 0 \implies \exists x \in (a,b): f(x) = p}$$

Uvedená definice stupně má podstatné nevýhody:

- vyžadujeme pouze body p s vlastností
  $\forall x \in (a,b) : \left[f(x) = p \Rightarrow f'(x) \neq 0 \right]$
- stupeň je definován pouze pro $f \in C^1(\langle a,b \rangle)$
- pracujeme pouze s funkcí jedné proměnné

Definici stupně lze – PODSTATNĚ – zobecnit!

VĚTA (o existenci stupně v $\mathbb{R}^n$)

Existuje zobrazení (značíme ho deg), které každé otevřené omezené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, funkci $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ spojité na $\overline{\Omega}$ a bodu $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial \Omega)$ přiřadí celé číslo $\deg(f, \Omega, p)$ tak, že platí

(i) (normalizace) $\forall p \in \Omega : \deg(Id, \Omega, p) = 1$,

(ii) (aditivita vzhledem k Ω)

$\forall \Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ otevřené disjunktní! $\forall f \in C(\overline{\Omega})\ \forall p \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$:

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p)$$

(iii) (spojitost vzhledem k f)

$\forall f \in C(\overline{\Omega})\ \forall p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)\ \exists \varepsilon > 0\ \forall g \in C(\overline{\Omega})$:

$$\|f-g\|_{C(\bar\Omega)} < \varepsilon \implies \deg(f,\Omega,p) = \deg(g,\Omega,p)$$

(iv) (invariance vzhledem k posunutí)

$$\forall f \in C(\bar\Omega)\ \forall p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega):\ \deg(f,\Omega,p) = \deg(f-p,\Omega,0)$$

Poznámka: Lze dokázat, že stupeň zobrazení je podmínkami (i) – (iv) určen jednoznačně.

Věta (vlastnosti stupně)

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená otevřená, $f: \bar\Omega \to \mathbb{R}^n$ spojité, $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Pak

(i) (řešitelnost rovnice)

$$\deg(f,\Omega,p) \neq 0 \implies \exists x \in \Omega:\ f(x) = p,$$

(ii) (spojitost vzhledem k p)

$\deg(f,\Omega,\cdot)$ je konstantní na všech komponentách $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$,

(iii) (invariance vzhledem k homotopii)

Nechť $H: \langle 0,1\rangle \times \bar\Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení a nechť $\forall t \in \langle 0,1\rangle\ \forall x \in \partial\Omega:\ H(t,x) \neq p$.

Pak $\deg(H(0,\cdot),\Omega,p) = \deg(H(1,\cdot),\Omega,p)$

(iv) (Závislost na hraničních hodnotách)

$$\forall \left(f, g \in C(\overline{\Omega}),\ f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}\right)\ \forall p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega):$$

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(g, \Omega, p)$$

Věta (Brouwerova o pevném bodu)

Nechť $f : \underset{\mathbb{R}^n}{\overline{U(0,1)}\cap} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^n}{\overline{U(0,1)}\cap}$ je spojité.

Pak $\exists\, x \in \overline{U(0,1)} : f(x) = x$.

Důkaz. Existuje-li $x \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\|x\| = 1$ a že $f(x) = x$, jsme hotovi.

Předpokládejme nyní, že

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1 \implies x - f(x) \neq 0 \qquad (*)$$

Definujme $H(t, x) \overset{\text{def.}}{=} x - t \cdot f(x)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, $x \in \overline{U(0,1)}$

Pak

1) H je spojité na $\langle 0,1\rangle \times \overline{U(0,1)}$,

2) $\forall x \in \overline{U(0,1)}: H(0,x) = x$, $H(1,x) = x - f(x)$,

3) $\forall t \in \langle 0,1\rangle\ \forall x \in \partial U(0,1): H(t,x) \neq 0$,

(• je-li $t = 1$, je $H(1,x) = x - f(x) \neq 0$ ... viz (*)

• je-li $t < 1$, $\|x\| = 1$, je $\|t \cdot f(x)\| < 1$, a proto

$H(t,x) = x - tf(x) \neq 0$),

a proto

invariance vzhledem k homotopii

$$\deg(H(0,\cdot), U(0,1), 0) = \underline{\deg(H(1,\cdot), U(0,1), 0)}$$

$$\| $$

$$\deg(Id, U(0,1), 0) = \underline{1} \neq 0$$

normalizace

řešitelnost rovnice $\Downarrow$

Rovnice $H(1,x) = x - f(x) = 0$
má řešení v $U(0,1)$.

cbd.